

Interesting Lecture 加速度

ずれの距離を ΔS 、時間を t とすると加速度 a は次式で表される。

$$a = 2 \Delta S / t^2$$

単位時間 $t=1 \text{ sec}$ では $a = 2 \Delta S \text{ m/s}^2$

つまり仮想的運動と実際の運動のずれの距離 ΔS の2倍が加速度 a に対応する

富山大学大学院理工学研究部 名誉教授 対馬勝年

単位時間当たりの「仮想的速度」と「実際の速度」の間の「速度のずれ」は加速度 a に等しい。単位時間当たりの速度 V の増減 ΔV は加速度 a の定義でもある。

$$a = dV/dt = [(V + \Delta V) - V]/dt = \Delta V/dt \quad (1)$$

たとえば、地球の重力場での自由落下の場合は g を重力加速度として速度 V は

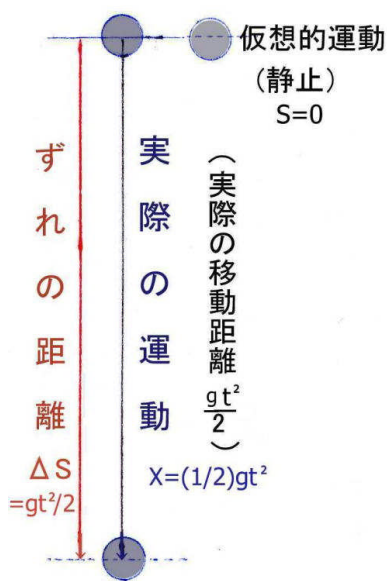
$$V = gt \quad (dV/dt = g) \quad (2)$$

のように落下時間 t に比例して一定の割合 g (重力による加速度、重力加速度)で速くなっていく。ところで上の関係式 $V = gt$ はよく知られた式であるが、これをいろいろな現象に適用するのはそう簡単でない。なにしろ速度 V の直接測定が厄介だからだ。時間 t なら例えばストップウォッチなどで測れるし、距離 S なら巻き尺などで測れる。しかし、速度 V は簡単に測れない。だから速度 V の変化から加速度 a を決定しようとしても、そうたやすくは行かない場合が多い。

さて、なぜ加速度 a を知りたいかというと、質量 m の物体の運動方程式が

$$F = ma \quad (3)$$

で示されることからわかるように、運動している物体(質量 m)に作用する力 F や運動の軌跡がわかるからである。Newtonの運動の法則は①外力 F の作用がない場合、静止に



ある物体はいつまでも静止状態を続け、一方、②運動している物体は等速直線運動を続けるというものである。物体が速度を変えたり、(直線から)運動方向を変えることがあるとすれば、物体に外力 F が作用していると見なすことができる。

よく知られた重力場での自由落下に戻ると、図1のように落下距離 X は落下時間 t の2乗に比例し、

$$X = (1/2)gt^2 (= \Delta S) \quad (4)$$

と表されることもよく知られている。この場合、 X はずれの距離 ΔS に等しい。

(上式は(2)式の速度 V を時間 t で積分して導かれる。)

$$X = \int_0^t V dt = \int_0^t gt dt = (1/2)gt^2 \quad (5)$$

(4)式から $g = 2 \Delta S / t^2$ の関係が導かれる。 $t=1 \text{ sec}$ を代入して、 $g = 2 \Delta S$ 。ここが本論の着目点である。つまり、

図1 静止状態からの自由落下 「加速度 a は単位時間のずれの距離 ΔS (仮想的運動と

実際の運動のずれの距離) / t^2 の2倍に等しい」ということになる。($t=1s$ とし $\Delta S/t^2 = \Delta S$ と表現する場合でも s^{-2} のディメンションは残ることに注意)

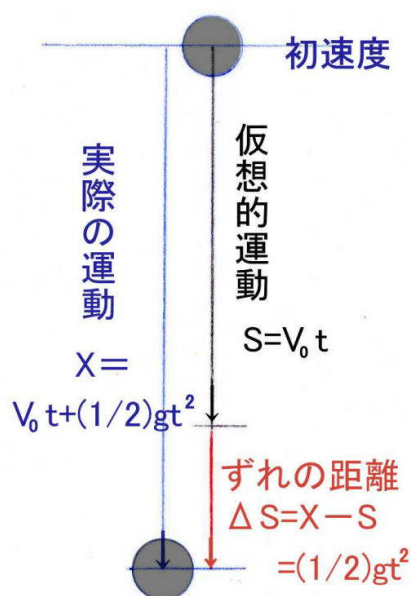


図2 初速度 V_0 の物体の落下

いままでは初速度 0 (静止状態、仮想的には動かない、図 1) の場合から始めたが、図 2 のように落下の途中の単位時間 (1 秒) で考えることもできる。速度を V_0 とし加速度がないとすれば 1 秒間に物体は、

$$S = V_0 t$$

だけ進む。この S が仮想的運動距離である。

加速度 a があると、速度は $V = V_0 + at$ の関係で時間 t に比例して増大する部分に加わるから実際の落下距離 X は上の式を時間 t で積分して

$$X = V_0 t + (1/2)at^2 \quad (6)$$

となる。単位時間における仮想的移動距離 S と実際の移動距離 X の差を ΔS とすると

$$\begin{aligned} \Delta S &= X - S = [V_0 t + (1/2)at^2] - (V_0 t) \\ &= (1/2)at^2 \quad [a/2, \quad t=1s \text{ を代入}] \quad (7) \end{aligned}$$

が得られる。やはり、 $a = 2 \Delta S / t^2$ の関係になっている。加速度の方向は図 2 に示すように仮想的運動の終端から実際の運動の終端に向かう方向となる。

前にも述べたように、時間 t も距離 S や X 、ずれの距離 ΔS もストップウォッチや巻き尺などで簡単に測れる場合が多いから、これは加速度 a を見積もる実用的な方法といえる。ただし、自由落下の場合

は加速が大きすぎて時間の測定が難しい。

さて、筆者がここまで加速度 a とずれの距離 ΔS の関係を長々と述べてきた理由の一つは、自転する地球上にいる観測者 (つまり私たち) が長い紐をもつ振り子 (フーコーの振り子) の振動面が時間の経過とともに変わっていくこと、大気を動かす駆動力は気圧差であるはずなのに風は等圧線に直角には吹かず平行に吹く (地衡風) ことがあること、低気圧の中心に向かって吹く風が北半球では上から見て左巻の渦を巻くように吹くこと、大砲の弾がどの方向

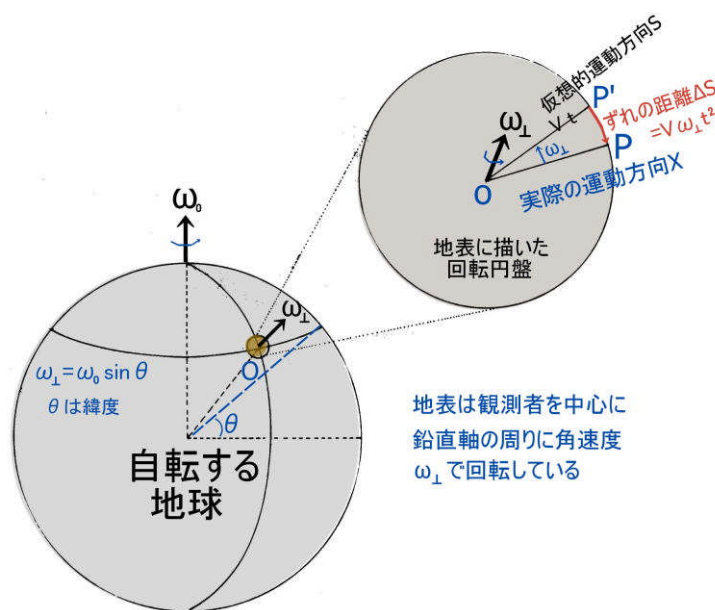


図3 自転する地球上での物体の運動
北半球で物体は右に逸れて進む

に飛んでも同じ方向（北半球なら必ず右側）へずれること、このような運動のずれはずれの方向に力 F が働いているからであり、力 F のもとになっている加速度 a はコリオリの加速度 α とよばれ次式で表現されている。

$$\alpha = 2\mathbf{V} \omega_{\perp} \quad (8)$$

\mathbf{V} は物体の速度、 ω_{\perp} はその場所の地面に鉛直な軸の周りの地球の回転角速度（成分）である（この角速度（成分）は夜空で真上を向けたカメラに長時間露光を与えたときに映る円弧状の星の軌跡（図 4）から地面が孤の軌跡と逆方向に回転していることがわかる）。地球は半径が 6400km と大きいから、数 100km の狭い範囲内の運動なら地表を円盤で近似できる。



図 4 長時間露光で撮影された同心円状の星の軌跡
（星の位置は変わらないからカメラが大地とともに回転している）

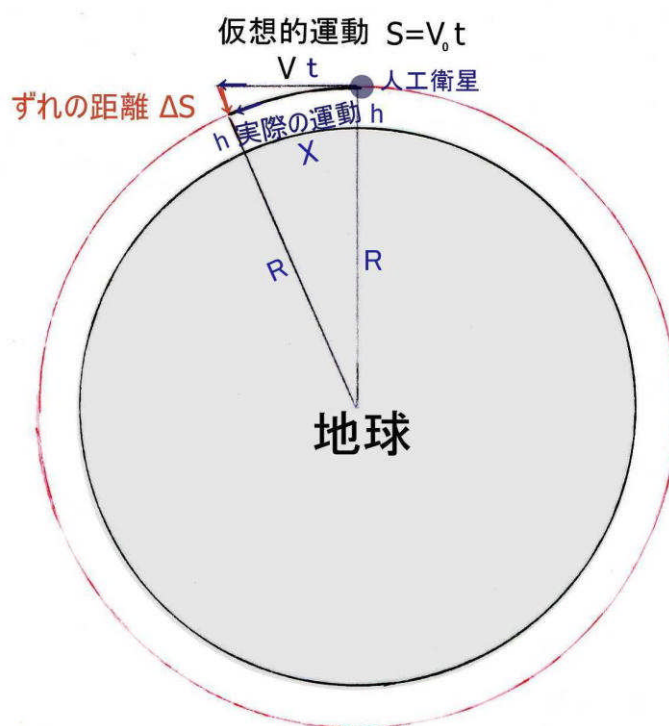
つまり、巨大な円盤が ω_{\perp} の角速度で回転していると見なしてよい。そうすると $\mathbf{V} \omega_{\perp} t^2$ は円盤上の仮想的運動と実際の運動とのずれの距離であり、つまり ΔS に相当すること、2 はずれの距離の 2 倍の意味であり、コリオリの加速度の式が直観的に理解される。 α は重力加速度のように一定値とはならない。

従来、力学の方で行われる静止座標から回転座標への面倒な変換など必要なく、ずれの距離による説明は物理的概念も明確である。大学の物理系学科で学ぶコリオリの加速度 α だが、ここでの説明は中学生レベルの学力で十分に理解できるであろう。

筆者は教員免許更新講習で上のことを説明した後、研究グループの島田互准教授製作の大型回転円盤上でキャッチボールをしたり、ボールを転がしたり、振り子の上端をもって振動面を観測したりという体験をしていただくと、試乗者は予想外にずれるのに驚かれる。一方、円盤の外にいる先生方はボールが円盤の回転とは無関係に直線的に飛ぶのに気づく。円盤に乗って観察したときは振動面が次々に変わっていった振り子も、円盤の外から見ると同じ方向に振動していることを確認する。このことから推察すると大砲の弾は地球の外から観察すれば真っ直ぐ飛んでいることに気づく。ただ観測者が回転する地表上にいるために弾丸がずれて飛んでいくように見えるに過ぎないことを理解する。もちろん地球上の人は回転する地球とともに生活し、地球が自転しているとは気づかないし、自転していることを殆ど意識しないのが現実である。この地上で生活する人々の意識を優先させると、物体に何か架空の力が作用して曲がって運動するのだとへりくつを付け、つじつまを合わせる。この架空の力の源がコリオリの加速度である（重力や重力加速度は実在するが、コリオリの力やコリオリの加速度は実在しない。）

次に、この有用な関係のいくつかの適用例を示そう。

①地球を周回する人工衛星の場合。人工衛星に働く向心加速度(図5)



地球の半径を R とし、図 5 のように人工衛星が高度 h の赤道を速度 V で周回しているとす。人工衛星は常に接線方向に速度 V で運動(仮想的運動)するが地球の引力に引かれ ΔS だけ落下して円軌道を描く運動(実際の運動)になる。

$$[(R+h) + \Delta S]^2 = (R+h)^2 + (Vt)^2 \quad (9)$$

したがって

$$2(R+h)\Delta S = (Vt)^2$$

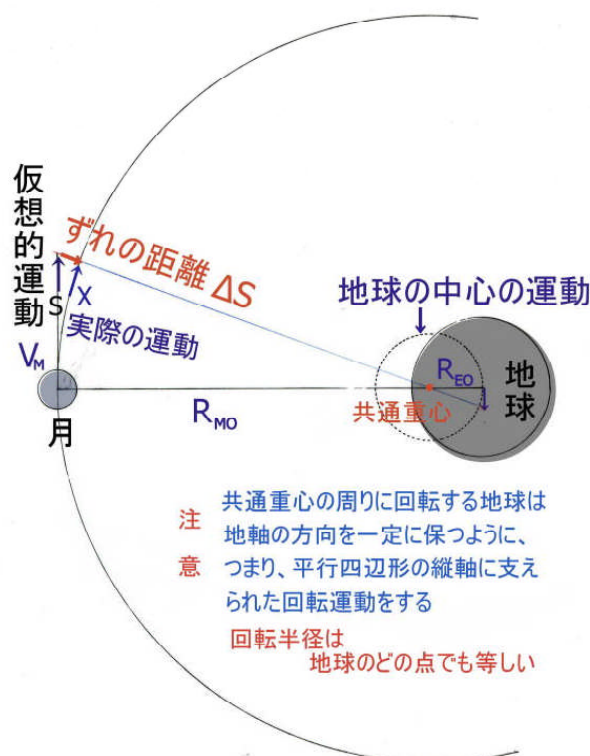
$$a = 2\Delta S/t^2 = V^2/(R+h)$$

$$\doteq V^2/R \quad (t=1, \text{通常 } R \gg h)$$

この $a = V^2/R$ は衛星に働く向心加速度であり、地球が人工衛星及ぼす重力加速度に他ならない。

図5 地球の周りを周回する人工衛星に働く向心加速度

②地球と月の二体運動で働く向心加速度(図6)



地球と月の間には万有引力が働いているのだから、月は地球に落ちてくるのではないか、地球もまた月の方へ接近していくのではないかという素朴な疑問が生ずる。しかし、地球と月の距離は一定に保たれていて月が地球に近づいているという兆候はない。そこで、月が落ちてこない理由は月に「遠心力」が働いているからだとして説明されると何となく納得させられてしまう。しかし、本文のコリオリの力で述べたのと同じように遠心力もまた実在しない架空の力であって、月を地球と反対方向に引っ張る力は存在しない。この疑問は以下に述べるように遠心力を使わずに月や地球の運動から説明できるのである。

図6 月と地球の二体問題 月も地球も共通重心の周りに同じ周期(約28日)で回転している

地球の周りを周回する月は地球が月に及ぼす万有引力によって、常に地球に落ち続けている。単位時間に落ちる距離を ΔS としよう。月は地球の周り（正しくは月と地球の共通重心の周り）を回る周回軌道の接線方向に速度 V （約 27 日で一周）で運動し、常に地球から遠ざかっていく。しかし、万有引力による向心加速度が作用し、単位時間当たり ΔS だけ常に落下している。共通重心と月間の距離を R_{MO} とすると

$$(R_{MO} + \Delta S)^2 = R_{MO}^2 + (Vt)^2 \quad \text{だから} \quad \alpha = 2 \Delta S / t^2 \doteq V^2 / R_{MO}$$

$R_{MO} = 38 \text{ 万 km} = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ 、 $V = 2 \pi R_{MO} / (27 \times 24 \times 3600 \text{ sec}) = 1.02 \times 10^3 \text{ m/s}$ なので $\alpha = 2 \Delta S / t^2 = 2.76 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ と求まる。この α は地球が月に及ぼす重力加速度 GM_E / R^2 に等しい（ G は万有引力定数 $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ 、 R は地球と月の間の距離 38.44 万 km、 M_E は地球の質量）。 $\alpha = GM_E / R^2$ の関係を使えば α から地球の質量 M_E を決定することもできる。

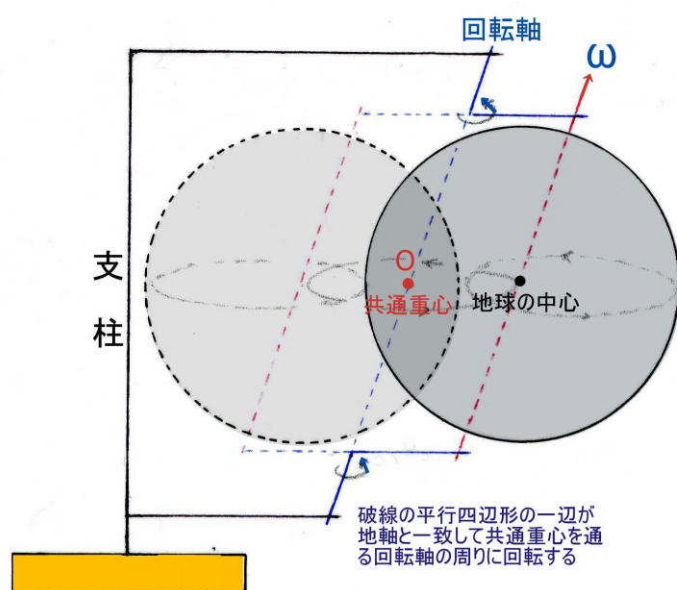


図 7 共通重心 O の周りの地球の回転運動
(地球は地軸の方向 ω を平行に保ちながら回転する)

地球が単位時間当たり ΔS だけ月側に引き戻される（月へ落下する）結果、円軌道を描く運動をしている。

$$(R_{EO} + \Delta S)^2 = R_{EO}^2 + (Vt)^2$$

つまり $\alpha = 2 \Delta S / t^2 \doteq V^2 / R_{EO} = 3.47 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$

この α は月が地球に及ぼす万有引力による重力加速度 GM_m / R^2 に等しいから、月の質量 M_m が決定される。（共通重心の周りの地球の運動は図 7 のように地軸の方向を平行に保ちながら回転することに注意。このため地球のどの場所も同じ半径で回転する。よく地球の潮汐の説明の際に地球に働く遠心力は地球のどの場所でも等しいといわれると、遠心力の大きさは回転半径に比例するはずだから、どうして遠心力はどこでも等しいのだろうか疑問を懐くが、図 7 のような平行四辺形の一辺に支えられた回転運動をするため、地球のどの場所も等しい回転半径となるのである。）

一方、地球に着目すると地球は「地球と月の共通重心」の周りに月と同じ約 27 日で回転している。地球と月の質量の比は約 81 : 1 であるから、共通重心の位置は地球の中心から約 $R_E = 4790 \text{ km}$ 離れたところ（地球の半径は 6400 km だから、地球の内部に位置する）にある。地球が共通重心の周りを回る速度は地球上および地球内部の場所に関係なく一定で $V = 12.9 \text{ m/s}$ となる。地球は半径 R_{EO} の円軌道の接線方向に速度 V で飛行するわけだから、月から遠ざかる。しかし月からの万有引力を受けて地

③地球の潮汐

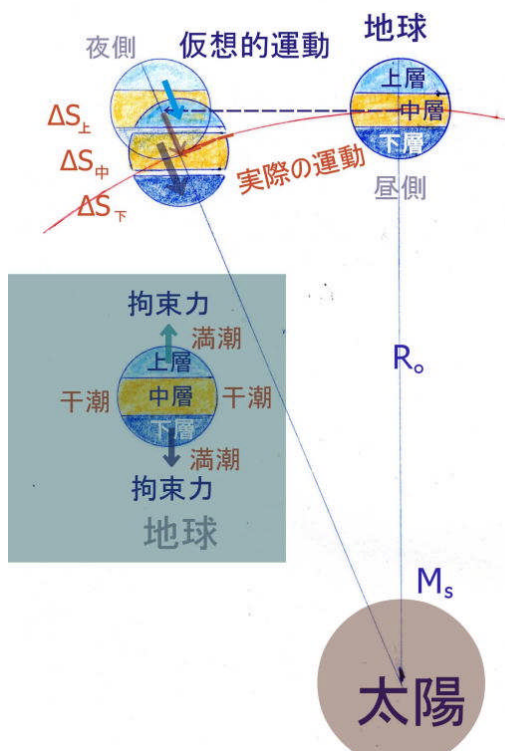


図 8 太陽による地球の潮汐

上層は太陽からの距離が遠い分、太陽による引力が小さく、落下距離 $\Delta S_{上}$ は $\Delta S_{中}$ より小さい。下層は中層より太陽に近いからより大きく落下し $\Delta S_{下}$ は $\Delta S_{中}$ より大きい。その結果、三層の落下距離が異なり、上層と下層は上下に離れ、中層との間に隙間を生ずる。しかし、地球は固く一体となっていて離れることはないから、上下に膨らむことになる。海水は連続体だから中央部分の海水が上下に引かれ、中層の海水は凹む(干潮)。海面の膨らみは太陽に近い昼側と太陽から遠い夜側で同じ大きさとなる。地球の上下の層が離れないため図中の挿入図のように上下に外側に引っ張る拘束力が発生する。上下の拘束力は等しく、この拘束力により海面が上下に膨らんで満潮が生じ、中央部の海水が上層および下層部分に移動して海面が下がり干潮となる。月による潮汐も同様に説明される。月が太陽と同じ側および反対側にあると太陽と月による潮汐は強めあい大潮となる。

太陽の引力により発生する加速度は下層が $2 \Delta S_{下} = GM_s / (R_0 - r)^2$ 、中層で $2 \Delta S_{中} = GM_s / R_0^2$ 、上層では $2 \Delta S_{上} = GM_s / (R_0 + r)^2$ である(r は地球の中心からの距離)。層間の隙間は上下で等しく $a = \Delta S_{下} - \Delta S_{中} = \Delta S_{中} - \Delta S_{上} = (GM_s / 2R_0^3) r$ の加速度で広がって行く。太陽の質量 M_s は月の質量に比べると桁違いに大きい、太陽と地球の間の距離 R_0 は1.5億kmも離れており、膨らみが R_0^{-3} に比例することからこの距離の影響が大きく作用し、太陽よりも地球の近くにある月による潮汐の方が太陽による潮汐よりも大きく現れる。さて、上の $a = (GM_s / 2R_0^3) r$ の式に数値を代入して潮位の変化を求めると単位時間の変化は桁違いに小さい。しかし、潮位は時間をかけて変化していくので、1時間なら単位時間の 1.3×10^7 倍、4時間なら 2×10^8 倍となり実測できる値となる。

④スピードスケート競技でコーナーを回るときの向心加速度 (図9)

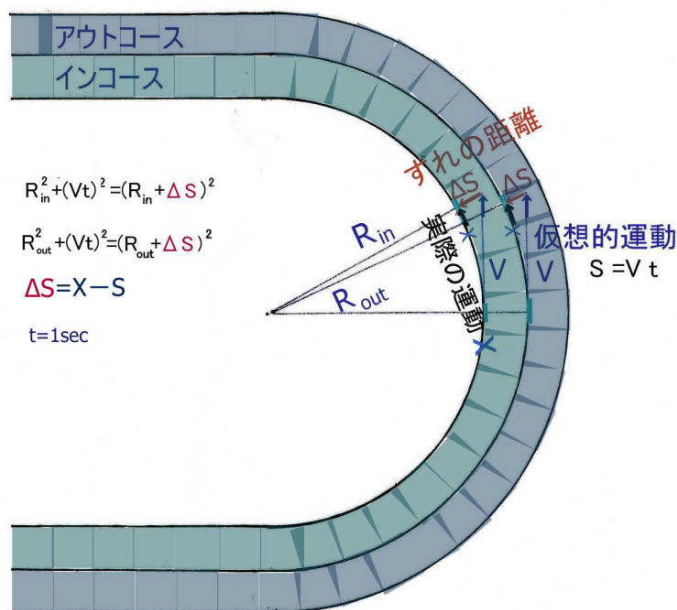


図9 スピードスケート競技のコーナーにおける加速度

m/s のときに達成される。(インコースで減速が必要な場合でも、アウトコースでは加速しながら滑り込める。) スケート滑走の場合、半円の中心に向かう万有引力のような向心加速度の原因となる力は存在しない。そのため選手には $2 \Delta S / t^2$ と大きさは同じで、逆

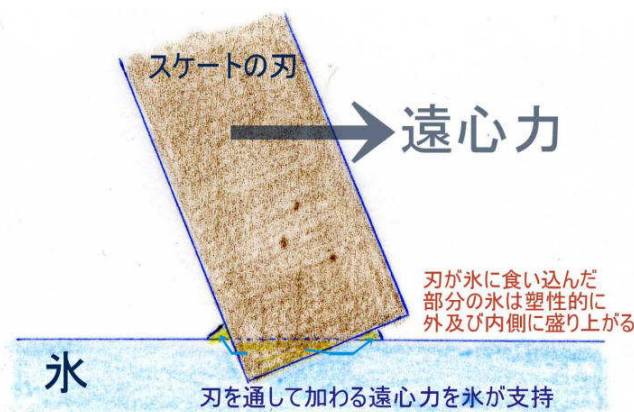


図10 氷による遠心力の支持の支持

るかに大きく、空気抵抗が小さくなる高地(空気密度が小さい)のリンクで好記録がでる。しかし、高速になるとコーナーでの遠心力の増大、氷の支持力不足が新たな問題として登場する。そこで、コーナー部に自己バンクを形成しやすい氷を貼り、選手の潜在力を引き出そうという提案(次世代氷筍リンク)も出されるわけである。

スピードスケート競技ではコーナー部の半径 R はインコースが 25m である。速度 $V=15\text{m/s}$ でコーナーを回るときに選手に作用する向心加速度 α は

$(R + \Delta S)^2 = R^2 + (Vt)^2$
の関係 ($R \gg \Delta S$ である) から

$$2R \Delta S = (Vt)^2$$

つまり

$$\alpha = 2 \Delta S / t^2 \div V^2 / R = 9\text{m/s}^2$$

となり、体重に匹敵する向心加速度になることがわかる。アウトコースは半径 30m なので、向心加速度は 7.5m/s^2 となり、インコースの場合より 17% も小さい。 9m/s^2 の向心加速度はアウトコースでは速度 $V=16.4$

向きの加速度(遠心加速度)が働く。力で表すと選手の質量を m とすると $-m \alpha$ の力(遠心力)となる。この遠心力は図10のようにスケートの刃(幅 1mm 程度)を鉛直軸から傾けて氷に食い込ませることにより氷に支えてもらっている。食い込みが不十分だったり、氷によるスケートの支持力が不十分な場合選手はコーナーの接線方向へ転倒する。

スピードスケート競技では選手の受ける空気抵抗が摩擦抵抗よりは

④カーリング石のカールの場合(図 11)

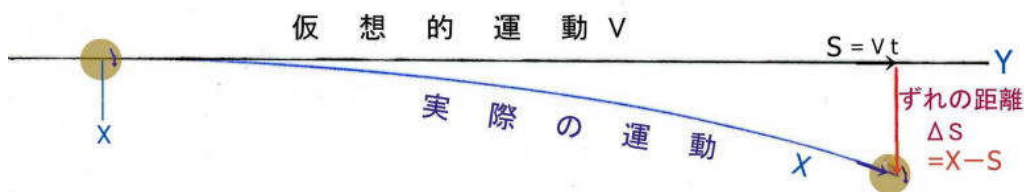


図 11 カーリング・ストーンのカール

ハウスに向かう y 軸方向に $V=1\text{m/s}$ で滑っているストーンが 1 秒後、y 軸に直交する x 軸方向に $\Delta S=0.1\text{m}$ ずれていた場合を考えよう。x 軸方向の加速度 α_x は

$$\alpha_x = 2 \Delta S / t^2 = 0.2\text{m/s}^2$$

$$V_x = \alpha_x t = 0.2t$$

$$\Delta S_x = 0.1t^2 \quad (10)$$

として石の横方向の運動方程式が導かれる。しかし、実際のカーリング石の滑りでは横方向の加速度 α_x は石の速度、自転角速度、氷温、ペブルの状態などに依存して変わるから上に述べたほど単純にはいかない。

(X 軸方向のずれ(カール)の生ずる機構をめぐってははまだ定説がなく、学界でも左右摩擦異方性起因説と前後摩擦異方性起因説の間で議論が続いている。)

カーリングリンクは図 12 のようにホッグラインの間隔が 21.95m、ホッグラインからハウスまでの距離が 28.35m、ハウスの円の半径はそれぞれ 0.15、0.61、1.22、1.83m であり、石の直径は 0.3m と規格が決まっている。したがって、競技のテレビ中継画面を見ながら手持ちのストップウォッチでホッグライン等からストーン停止までの時間 t を測り、目測で滑走停止距離 ΔS を見積もれば、おおよその平均摩擦係数 $\bar{\mu}$ を次式から見積もることができる。

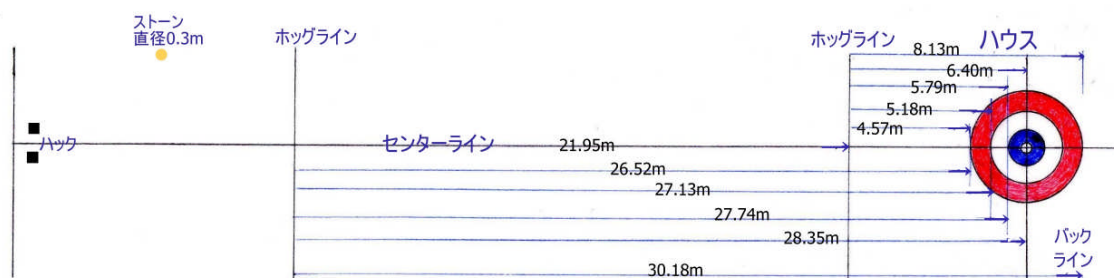


図 12 カーリングリンク

$$\bar{\mu} g = 2 \Delta S / t^2 \quad \text{ゆえに} \quad \bar{\mu} = 2 \Delta S / (gt^2) \quad g \text{ は重力加速度 } 9.8\text{m/s}^2$$

例えば、バンクーバーオリンピック(日英戦) テレビ中継画面から

$$t=27.41\text{sec}, \quad \Delta S = 28.3\text{m} \quad \text{より} \quad \bar{\mu} = 0.0077$$

$$t=9.18\text{sec}, \quad \Delta S = 4.87\text{m} \quad \text{より} \quad \bar{\mu} = 0.012$$

$$t=2.0\text{sec}, \quad \Delta S = 4.70\text{m} \quad \text{より} \quad \bar{\mu} = 0.019$$

のように平均の摩擦係数 $\bar{\mu}$ が見積もられる。平均摩擦係数は低速領域で増大する結果が得られた。最初の運動エネルギーを摩擦仕事に等しいと置けば初速度も決定されるから、摩擦係数 $\bar{\mu}$ の初速度依存性や摩擦係数 μ の速度依存性も見積もることができることになる。

⑤スケートや車両のすべり摩擦係数 μ (図 13)

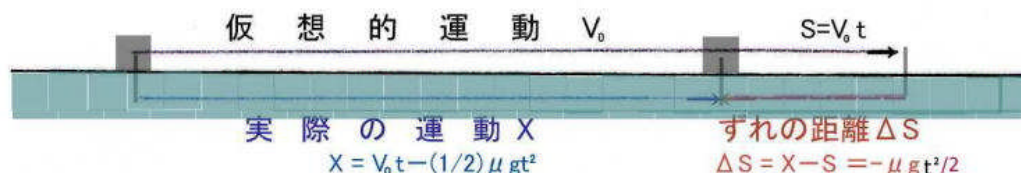


図 13 直線運動するスケートの運動

速度 V_0 で通過した質量 m のスケートや車両が1秒間に X だけ前進していたとすれば、仮想的な運動と実際の運動は同じ方向で図 12 のようになり、ずれの距離 ΔS は運動と逆方向になる。

$$\Delta S = X - S$$

力を F 、摩擦係数を μ 、重力加速度を g とすると

$$F = m(dV/dt) = -\mu mg = 2m \Delta S/t^2$$

だから

$$\alpha = dV/dt = 2(X - S)/t^2 (=2 \Delta S/t^2) = -\mu g \quad (11)$$

$t=1\text{s}$ 、 $V=1\text{m/s}$ 、 $X=0.9\text{m}$ 、 $g=9.8\text{m/s}^2$ の場合、 $\Delta S=-0.1\text{m}$ 、 $\alpha=-0.2\text{m/s}^2$ マイナス記号は負の加速度つまり抵抗を意味する。摩擦係数は $\mu=0.02$ と求まる。

ストーンが速度 V_0 から停止するまでをスタート地点からの位置がわかるように距離の目盛りを加えて動画に撮影すれば、その動画上でストーンの位置と時間の関係を解析して摩擦係数 μ を速度の関数として決定できるであろう。同様に制動中スリップしている自動車の摩擦係数 μ を速度 V の関数として決定することも可能であろう。

力学では摩擦抵抗や摩擦力は運動に抵抗する力として扱われるが、運動に対する抵抗は存在するが摩擦力というような独立した力が存在するわけではない。摩擦力という言葉が頻繁に使用しているとあたかも摩擦力という力が存在し、物体は摩擦力の方向に動くという推論を生ずる危険性を含んでいる。摩擦機構としての凝着説によると摩擦は真の接触面が凝着していることに起因するものであって、摩擦力という力が存在するわけではないことを示している。凝着部を剪断破壊するのに要する力や表面に傷を付けていく力が摩擦力と呼ばれているものの本質ということになる。

問答集

問 単位時間の仮想的運動距離や単位時間の実際の運動距離、単位時間のずれの距離は結局は仮想的速度、実際の速度、単位時間のずれの速度（つまり加速度の 2 分の 1）と同じなのではありませんか？

答 その通り同じです。距離に着目した理由のはじめの所で述べていますが、実測が容易で応用性が高まるという点です。特に、「コリオリの加速度が直感的に導けた」のはなるほどそう考えれば良いのかと納得して頂けたと思います。速度の変化だけにこだわっていた場合、本論で示されたのと同程度の容易さでコリオリの加速度が直観的に導かれるかどうかわかりません。

問 加速度 a が単位時間のずれの距離の 2 倍、コリオリの加速度では $V \omega t^2$ の 2 倍で表現されますが、どうして 2 倍になるのですか。

答 加速度 a があると t 秒後の速度 v は $v=at$ で時間 t に比例して増速していきます。この間の平均速度は $\bar{v}=at/2$ です。加速度は平均速度の 2 倍（を t で割ったもの）に等しくなります。平均速度 \bar{v} に時間 t をかけたものは移動距離（ずれの距離 ΔS ）ですから、加速度 a は単位時間（ $t=1s$ ）のずれの距離 ΔS の 2 倍（を t^2 で割ったもの）になるのです。

追記 初めの速度と 1 秒後の速度のずれ Δv （単位時間当たりの速度のずれ）の 2 倍（ $=2 \Delta v/t$ ）は加速度 a に等しいということ移動距離に置きかえたのが本論です。

問 カーリングのカールで 1sec 間のずれの距離が小さすぎて実測しにくいとき、たとえば 10 秒間のずれ δ_{10} から、1 秒間のずれを $\delta_{10}/10$ と見積もって横方向の加速度 a_x を求めることは可能でしょうか。

答 ずれの距離を実測できる程度に長い時間 t_0 を掛けて測定した「ずれの距離 δ_0 」から単位時間当たりのずれ δ を見積もることは可能ですが、その場合 $\delta = \delta_0/t_0^2$ となります。したがって、単位時間のずれの距離は 10 秒間のずれの実測値の 100 分の 1 になります。

最後に本稿について森克徳富山大学名誉教授から丁寧なコメントを頂いたことを記し、感謝の意を表します。(2014 年 6 月)